
SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

P. PLAZZI

L'EQUAZIONE DEGENERE NON LINEARE

$$D_t(Mu(t)) + Lu(t) = f(t, Ku(t))$$

BOLOGNA, 30 MAGGIO 1985

1. INTRODUZIONE

Questa conferenza si riallaccia strettamente a quella tenuta da A. Favini per questo medesimo ciclo di seminari il 28/11/84 ([4]): in effetti, i risultati discussi nel presente Seminario, relativi all'equazione astratta

$$(1) \quad \frac{d}{dt} (Mu(t)) + Lu(t) = f(t, Ku(t))$$

sono un approfondimento ed una estensione di quelli già esposti, tratti dal lavoro in collaborazione [1], relativo all'equazione

$$(2) \quad BTu = f(u)$$

in cui le ipotesi su B , T , f erano state scelte in modo da rendere (1) un caso particolare di (2) (in particolare, B veniva sempre supposto invertibile con continuità).

Uno dei motivi dell'interesse delle equazioni astratte risiede nella possibilità di *algebrizzare* in parte un'equazione differenziale: se si riscrive (per fare un esempio elementare) l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

in forma di equazione astratta (di evoluzione)

$$u' = Tu \quad (T = \Delta)$$

si spostano i problemi relativi allo studio di un operatore differenziale nel quadro delle proprietà di invertibilità (e quindi, più in generale, spettrali) di certi operatori lineari tra spazi funzionali; ciò è ancora più sensibile nella trattazione di equazioni degeneri ed ha motivato, per lo studio di una equazione del tipo

$$(2') \quad \frac{d}{dt} Tu(t) = f(t, u(t))$$

una ulteriore 'algebrizzazione' che ha portato allo studio della generalizzazione (2) di (2'), ove B è un operatore lineare chiuso che nei casi tipici rappresenta una derivazione, ed il secondo membro di (2') è interpretato come un operatore di Nemytskij agente su u , intesa come funzione a valori vettoriali.

Come è prevedibile, ad assicurare l'esistenza di soluzioni per la (2) sono essenziali ipotesi di tipo spettrale su T : in particolare, la tecnica usata in [1] richiedeva la scomposizione dello spazio ambiente E di T in

$$(3) \quad E = N(T^m) \oplus R(T^m)$$

per un $m \in \mathbb{N}$ (N = nucleo, R = codominio): è noto ([3]) che una ipotesi che assicura la decomposizione (3) è che il risolvente $\lambda \rightarrow (\lambda I - T)^{-1}$ abbia una singolarità polare per $\lambda = 0$, sicché in [1] questa ipotesi su (2) veniva costantemente mantenuta (oltre naturalmente ad altre su B ed f).

Come specializzazione dei risultati di esistenza su (2) veniva ottenuto un analogo risultato per l'equazione 'semilineare'

$$(1') \quad BMu = -Lu + g(u)$$

($L, M \subseteq F \rightarrow E$ sono operatori lineari chiusi densamente definiti tra i Banach F ed E , $g: \mathcal{D}(L) \rightarrow E$ è continua).

Precisamente, si può ottenere ([1, theorem 3]):

Teorema A. *Data l'equazione (1') nelle ipotesi dette, se, di più, $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(M)$ (\mathcal{D} = dominio), L è invertibile, e, posto $T = ML^{-1}$, si ha un polo semplice in $\lambda = 0$ per $\lambda \rightarrow (T - \lambda I)^{-1}$, allora (1') ha soluzione sotto le ulteriori condizioni*

la norma $\|B^{-1}; L(E)\|$ può
essere supposta piccola a sufficienza; (H)

$(B - \lambda I)^{-1}$, $(T + \mu I)^{-1}$ commutano per ogni
 λ, μ per cui esistono; (K)

g soddisfa una condizione di Lipschitz
 $\|g(u) - g(v); E\| \leq M \|u - v; \mathcal{D}(L)\| \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(L)$ (J)
($\mathcal{D}(L)$ ha la norma del grafico)
con $M > 0$ sufficientemente piccolo.

Le ipotesi (H) e (K) sono supposte valere costantemente in [1] (in particolare, B è invertibile con continuità) e l'ipotesi (J) sulla piccolezza della costante di Lipschitz M per g si riflette nell'esistenza di soluzioni nel caso di 'piccole perturbazioni' della equazione lineare $BMu = -Lu$; in effetti si può applicare il teorema A al problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} Mu(t) = -Lu(t) + \varepsilon g(t, u(t)) & 0 < t \leq \tau \\ (I-P)u(t) \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow 0^+ \text{ (} P = \text{proiezione su } N(ML^{-1}) \text{)} \end{cases}$$

dove u è soluzione del problema in senso astratto, ed appartiene a $L^p([0, \tau]; X)$ ($p > 1$; X spazio di Banach), ottenendo esistenza di soluzioni per $|\varepsilon|$ piccolo: il fatto che la soluzione esista poi solo per piccoli $\tau > 0$ dipende invece essenzialmente da (H) (per maggiori dettagli, cfr. [1, example 1]).

Si sarà notato che nel teorema A si è fatta l'ipotesi di un polo *semplice* nell'origine per il risolvente di $T = ML^{-1}$: in effetti, coi metodi di [1] non è possibile ottenere altrimenti risultati migliori rispetto al caso generale (2); questo fatto - e l'interesse presentato da problemi in cui il risolvente di T non ha necessariamente singolarità polari nell'origine - motivano uno studio particolareggiato di (1) con tecniche più aderenti alla natura 'semilineare' dell'equazione.

2. L'EQUAZIONE $D_t Mu(t) + Lu(t) = f(t, Ku(t))$.

2.1. In [2] si studia dunque il problema

$$(P) \quad \begin{cases} D_t Mu(t) + Lu(t) = f(t, Ku(t)) & 0 < t \leq \tau \\ Mu(t) \rightarrow u_0 & \text{per } t \rightarrow 0+ \end{cases}$$

con K, L, M operatori lineari chiusi da Y a X , due spazi di Banach (L è sempre supposto invertibile con dominio $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(M) \cap \mathcal{D}(K)$; $f: [0, \tau] \times X \times X \rightarrow X$ è continua).

La soluzione cercata u non è 'astratta': è una soluzione 'clas

sica' nel senso che $u: [0, \tau] \rightarrow Y$ deve soddisfare (P) e inoltre

- i) $u(t) \in \mathcal{D}(L) \quad \forall t \in]0, \tau[$,
- ii) $t \rightarrow Lu(t)$ è X -continua su $[0, \tau]$;
- iii) $t \rightarrow Mu(t)$ è fortemente differenziabile su $]0, \tau[$;

per essere detta soluzione di (P).

2.2. Studiando direttamente (P) si possono ottenere risultati di esistenza sotto ipotesi meno restrittive (su f , ad esempio) di quelle del teorema A già nel caso stesso in cui l'origine è un polo sem plice di $z \rightarrow L(zM + L)^{-1}$ (ipotesi che, data l'invertibilità di L , coincide con l'ipotesi del polo semplice per il risolvente di $T = ML^{-1}$, che compare nel teorema A): in effetti, l'ipotesi (J) può in particolare ve nir rimpiazzata da ipotesi 'locali'.

Precisamente si ha ([2, theorem 1.1])

Teorema B. Si consideri (P) nelle ipotesi dette: in particolare $z = 0$ sia un polo semplice per $z \rightarrow (T - zI)^{-1}$, $T = ML^{-1}$. (P) ha una soluzione classica con $\tau > 0$ sufficientemente piccolo, se f soddisfa le seguenti condizioni:

- (H1) vi sono una funzione limitata positiva di $t \in]0, \tau[$, sia $t \rightarrow a(t)$, ed una funzione positiva non decrescente di $r, s \in [0, +\infty[$, sia $(r, s) \rightarrow C_1(r, s)$, tali che
- $$\|f(t, u_1) - f(t, u_2); X\| \leq a(t) C_1(\|u_1; X\|, \|u_2; X\|) \cdot \|u_1 - u_2; X\|;$$

(H2) vi sono una funzione positiva limitata di $t \in]0, \tau]$, sia $t \rightarrow b(t)$, una funzione positiva non decrescente di $s \in [0, +\infty[$, sia $s \rightarrow C_2(s)$, tali che

$$\|f(t, u); X\| \leq b(t) C_2(\|u, X\|) \cdot \|u; X\|;$$

(H3) $\lim_{t \rightarrow 0} a(t) = \lim_{t \rightarrow 0} b(t) = 0;$

questa soluzione esiste qualunque sia il dato iniziale $u_0 \in R(T)$.

■ Diamo una traccia della dimostrazione. Posto $N = KL^{-1}$, $Lu = v$ (P) si trasforma in (P_1) :

$$(P_1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} Tv(t) + v(t) = f(t, Nv(t)) & t \in]0, \tau] \\ Tv(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} w_0 \end{cases}$$

siccome la decomposizione $X = N(T) \oplus R(T)$ vale ([3]), dette P la proiezione indotta su $N(T)$, \tilde{T} la restrizione di T a $R(T)$, (P_1) a sua volta si decompone nel problema differenziale (P_2) e nell'equazione 'algebrica' (P_3) :

$$(P_2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \tilde{T}(I-P)v(t) + (I-P)v(t) = \\ \quad = (I-P)f(t, NPv(t) + N(I-P)v(t)), & t \in]0, \tau] \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} (I-P)v(t) = v_0 \end{cases}$$

con $w_0 = \tilde{T}v_0$, $v_0 \in R(T) = R(\tilde{T})$, e

$$(P_3) \quad 0 = -Pv(t) + Pf(t, NPv(t) + N(I-P)v(t)), \quad t \in]0, \tau].$$

Ora, in (P_2) , \tilde{T} è invertibile, sicché esso si trasforma in una equazione di Volterra nell'incognita $w = (I-P)v$:

$$w(t) = v_0 - \int_0^t \tilde{T}^{-1} w(s) ds + \int_0^t \tilde{T}^{-1} (I-P)f(s, NPv(s) + Nw(s)) ds, \quad 0 < t \leq \tau,$$

in dipendenza da un parametro Pv . Le ipotesi fatte permettono di applicare il principio del punto fisso per contrazioni, ottenendo una soluzione $w = u(Pv)$, che dipende in modo lipschitziano da Pv : una nuova applicazione del principio di punto fisso in (P_3) permette ora di concludere. ■

2.3. Il teorema B è un'estensione del teorema A, ed esso può venir applicato in molti casi; certamente ad alcuni sistemi di equazioni ordinarie, cioè quando, essenzialmente, L ed M si riducono a matrici: ma in questi casi si potrebbero usare, unitamente al principio di punto fisso, proprietà dell'inversa di Drazin - cfr. [5] - ottenendo risultati più generali di quelli esposti qui, che sono significativi per equazioni intrinsecamente astratte (cioè in spazi di dimensione infinita): un caso genuinamente nuovo è quello in cui si abbiano operatori di tipo Fredholm (ad esempio, se M è definito da un opportuno operatore differenziale); tuttavia applicazioni di tipo molto semplice possono non ricadere più sotto le ipotesi di B: un caso del genere è rappresentato da un operatore M di moltiplicazione per una funzione $x \rightarrow m(x)$ non negativa, con $-L$ fortemente ellittico. Per ottenere risultati di esistenza per (P) in situazioni di questo genere, si può rimpiazzare l'invertibilità di $z-ML^{-1} = z-T$ vicino all'origine, con una delle seguenti ipotesi:

$$(I) \quad \begin{aligned} & sM + L \text{ ha inversa (limitata) } \forall s \geq 0 \text{ e} \\ & \|L(sM + L)^{-1}; L(X)\| \leq 1 \quad \forall s \geq 0 \\ & \text{(caso della contrazione);} \end{aligned}$$

$$(II) \quad \begin{aligned} & (sM + L)^{-1} \text{ esiste } \forall s \in \mathbb{C} \text{ con } \operatorname{Re} s \geq 0 \text{ e} \\ & \|L(sM + L)^{-1}; L(X)\| \leq \text{cost. in questo} \\ & \text{semipiano (caso analitico).} \end{aligned}$$

Infatti, se X è riflessivo, nei casi (I) o (II) vale una versione più debole di (3) (con $m = 1$), precisamente

$$(3') \quad X = N(T) \oplus \overline{R(T)}$$

e la restrizione \tilde{T} di T a $\overline{R(T)}$ è un operatore potenziale astratto, nel senso che \tilde{T}^{-1} genera un semigrupp \tilde{o} di contrazioni (caso (I)) o un semigrupp \tilde{o} analitico (caso (II)): con la scomposizione (3'), i metodi precedenti ed i risultati ottenuti in [6] da A. Favini si può trattare la equazione (1) prescindendo dall'ipotesi della singolarità polare nella origine per il risolvente di ML^{-1} .

Si ha come risultato ([2, theorem 2.2]):

Teorema C. Sia X riflessivo e si consideri (P) sotto una delle ipotesi (I) o (II); $g \in C([0, \tau] \times \mathcal{D}(L), \mathcal{D}(L))$ soddisfi

$$(H4) \quad \begin{aligned} & \|g(t, x_1) - g(t, x_2); \mathcal{D}(L)\| \leq C(\|x_1; \mathcal{D}(L)\|, \|x_2; \mathcal{D}(L)\|) \\ & \cdot \|x_1 - x_2; \mathcal{D}(L)\| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(L) \quad \forall t \in [0, \tau] \end{aligned}$$

con C positiva e non decrescente in entrambi i suoi argomenti, e sia $f = Mg$; quanto a K , sia limitata come applicazione $\mathcal{D}(L) \rightarrow \mathcal{D}(L)$.

Allora, dato $w_0 \in M(\mathcal{D}(L))$ come dato iniziale in (P) si ha soluzione classica definita su un intervallo $[0, \tilde{\tau}]$ con $\tilde{\tau} \leq \tau$ dipendente eventualmente da w_0 .

Queste ipotesi, come si vedrà nelle applicazioni, sono soddisfatte in casi in cui M è una moltiplicazione (per una funzione delle x) a cui non è applicabile il teorema B.

3. APPLICAZIONI

3.1. Anzitutto, il problema che ha motivato le tecniche di potenziale astratto di 2.3 è il seguente:

$$(P1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(m(x)u(t,x)) = -A(x, D_x)u(t,x) + f(t,x,u(x,t), \text{grad}_x u(x,t)) \\ \hspace{15em} 0 < t \leq \tau, \quad x \in \Omega \\ u(t,x) = 0 \quad \text{per } x \in \partial\Omega, \quad 0 \leq t \leq \tau \\ \lim_{t \rightarrow 0} m(x)u(t,x) = w_0(x), \quad x \in \Omega \end{array} \right.$$

dove: Ω è un aperto limitato e connesso con frontiera regolare $\partial\Omega$;

$A(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ è un operatore differenziale fortemente ellittico in Ω ;

$x \rightarrow m(x)$ è una funzione continua su $\bar{\Omega}$, non negativa e > 0 su Ω (m può annullarsi solo su $\partial\Omega$);

f è una funzione di $(t,x,u,v) \in [0,\tau] \times \Omega \times \mathbb{R}^{n+1}$.

Cominciamo col tradurre (P1) in termini astratti. Allora ad $A(x, D_x)$ è associato l'operatore A in $L^p(\Omega)$, $p \geq 2$ dato da

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \\ Au = A(x, D_x)u, \quad u \in \mathcal{D}(A): \end{cases}$$

A è il generatore infinitesimale di un semigrupp \grave{o} analitico ([8, p. 214]).

Per realizzare convenientemente l'operatore M introduciamo lo spazio pesato $V = L^p(m^{1/p}, \Omega)$, con duale $V' = L^p(m^{-1/p'}, \Omega)$ e norma $u \rightarrow (\int_{\Omega} m|u|^p)^{1/p}$ (rispettivamente, $(\int_{\Omega} m^{1-p'}|u|^{p'})^{1/p'}$).

Se allora L è definito da

$$\begin{cases} \mathcal{D}(L) = \{u \in \mathcal{D}(A); Au \in V'\} \\ Lu = Au \quad \text{se } u \in \mathcal{D}(L) \end{cases}$$

e M è la realizzazione in V della moltiplicazione,

$$\begin{cases} \mathcal{D}(M) = V \\ (Mu)(x) = m(x)u(x) \quad \forall x \in \Omega \text{ se } u \in V \end{cases}$$

si ha ([6]) che $zM + L$ ha inverso (limitato) $\forall z$ con $\text{Re } z \geq 0$ e

$$\|(zM + L)^{-1}; L(V', V)\| \leq C(1+|z|)^{-1} \quad \text{se } \text{Re } z \geq 0 :$$

ne segue direttamente che le prime condizioni nel teorema C sono soddisfatte ($X = V'$).

Per realizzare l'operatore non lineare a secondo membro, consideriamo anzitutto una funzione $g = g(t, x, u, v)$ che sia $C^{(1)}$ nelle sue variabili $(t, x, u, v) \in [0, \tau] \times \Omega \times R_u^n \times R_v^n$; l'operatore di tipo Nemytskij G dato da

$$G(t,u)(x) = g(t,x,u, \text{grad}_x u)$$

soddisfa ([7])

$$\|G(t,u_1) - G(t,u_2); L^p(\Omega)\| \leq \text{Cost} \|A u_1 - A u_2; L^p(\Omega)\|$$

se $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A)$,

dove C dipende dalle norme $\|D^j u_i; L^\infty(\Omega)\|$ ($j = 0,1; i = 1,2$), e $p \gg 1$; definito $G_1 = m^{1/p'} G$, si vede che è possibile applicare il teorema C a $f = m A^{-1} G_1$ (o, meglio, alla sua realizzazione astratta).

A questa versione astratta dell'equazione si applica più precisamente il teorema C, dando un risultato di esistenza parimenti relativo a quest'ultima (le condizioni iniziali ed al contorno sono tradotte in maniera standard: la condizione omogenea su $\partial\Omega$ porta alla scelta di u in un W_0 ; il limite per $t \rightarrow 0$ è nel senso della topologia L^p).

Per rientrare nel quadro delineato nel teorema C, il dato w_0 dovrà essere del tipo $w_0 = m \cdot u_0$ con $u_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $A(x, D_x)u_0 \in L^p(m^{-1/p'}, \Omega)$ dove $p \gg 1$.

3.2. Come esempio di applicazione del teorema B, consideriamo (una versione astratta del) problema

$$(P2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left(I + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (x,t) + \varepsilon f(t,x,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) \\ \qquad \qquad \qquad (t \in]0, \tau], x \in]0, \pi[) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \left(I + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(t,x) = w_0(x), \quad x \in]0, \pi[\\ u(t,0) = u(t,\pi), \quad t \in]0, \tau]. \end{array} \right.$$

Qui M è tipicamente realizzato da un operatore differenziale nella variabile di spazio:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(M) = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi) \subseteq L^2(0,\pi) \\ M\phi = \phi + \phi'' \end{array} \right.$$

$z \rightarrow (z + M)^{-1}$ ha un polo semplice per $z = 0$, e L realizzato da

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(L) = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi) = \mathcal{D}(M) \\ L\phi = -\phi'' \end{array} \right.$$

commuta con M , sicché ([6]) è possibile ottenere una stima del tipo richiesto per $L(zM + L)^{-1}$.

Rimane da assegnare f : se si largheggia nelle ipotesi, richiedendo che f sia $C^{(1)}$ nei suoi argomenti, si può ottenere in corrispondenza un operatore di sostituzione che almeno per $|\varepsilon| \ll 1$ soddisfa le richieste del teorema B: se quindi il dato w_0 è del tipo

$$w_0 = u_0 + u_0''$$

con $u_0 \in H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)$, si può assicurare l'esistenza di una soluzione per la versione astratta del problema (iniziale/ai limiti) considerato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] FAVINI, A. e PLAZZI, P., "Existence of Solutions for the Abstract Nonlinear Equation $Bu = f(u)$ ", in corso di stampa su Nonlinear Anal.
- [2] FAVINI, A. e PLAZZI, P., "Some Results Concerning the Abstract Degenerate Nonlinear Equation $D_t \mu(t) + Lu(t) = f(t, Ku(t))$ ", in corso di stampa su Circuits, Systems and Signal Processing.
- [3] YOSIDA, K., Functional Analysis, Springer 1968.
- [4] FAVINI, A., "Su una equazione astratta non lineare e degenera", Seminario di Analisi Matematica-Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, conferenza del 29/11/1984.
- [5] CAMPBELL, S.L. e MEYER, C.D., Generalized Inverses of Linear Transformations, Pitman 1979.
- [6] FAVINI, A., "Abstract Potential Operators and Spectral Methods for a Class of Degenerate Evolution Equations", J. Differential Equations 39 (1981), 212-225.
- [7] PAZY, A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer 1983.